Tema 11. Soluciones a los ejercicios adicionales

1. El peso (en Tm) de la captura diaria realizada por un barco pesquero, se aproxima a una distribució normal. ¿Entre qué valores oscilará el peso medio con una confianza del 98 %, si durante 10 días se recogieron los siguientes pesos?

   20, 25, 30, 60, 5, 22, 27, 33, 36, 15

   SOLUCIÓN:

   Definimos la variable aleatoria $X \equiv$ *peso en Tm de la captura diaria* $\sim N(\mu, \sigma)$, donde μ y σ son parámetros desconocidos.

   Para calcular el intervalo de confianza utilizaremos como variable pivote:

   $$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

   De manera que:

   $$P(-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

   De donde, pivotando, obtenemos el intervalo de confianza para μ:

   $$\mu \in \left(\bar{X} \mp \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \right)$$

   Los datos que necesitamos para poder calcular dicho intervalo son:

   - La media muestral:
     $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{273}{10} = 27.3$
   - La cuasivarianza muestral:
     $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = 213.34 \Rightarrow S = 14.606$
   - El valor del percentil $\alpha/2$ de t_{n-1}:
     $t_{9,0.01} = 2.821$

   De modo que **el intervalo pedido es** $(14.27, 40.33)$.

2. Un nuevo material está siendo contrastado para su próximo uso en los neumáticos de automóviles. Estos neumáticos se espera que duren unos 100000 km.

   15 juegos de 4 de estos neumáticos se someten a una prueba de resistencia bajo aceleración. La v.a. X, número de neumáticos en cada grupo de cuatro que falla prematuramente, se supone que se distribuye según una binomial.

   Estimar al 95 % un rango de valores para la proporción de neumáticos defectuosos, utilizando los siguientes valores muestrales de X:

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0.$$

SOLUCIÓN:

Definimos la variable aleatoria $X \equiv$ *número de neumáticos en cada grupo de 4 que falla prematuramente* $\sim B(4, p)$.

Lo que nos pide el enunciado es un intervalo de confianza al 95 % para la proporción p, que viene dado por:

$$p \in \left(\hat{p} + \mp z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Los datos necesarios para calcular dicho intervalo son:

- El número de individuos de la muestra (total de ruedas): $n = 15 \times 4 = 60$
- El estimador puntual de la proporción: $\hat{p} = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{8}{60} = 0.13$
- El percentil $z_{\alpha/2}$: $z_{0.025} = 1.96$

Con lo que el intervalo de confianza al 95 % para p es:

$$\left(0.13 \mp 1.96\sqrt{\frac{0.13 \cdot 0.87}{60}}\right) = (0.0473, 0.2193)$$

3. En una empresa de automoción se están probando dos métodos de montaje. Se escogen 20 trabajadores para hacer el montaje según el método I y 25 para trabajar según el método II. Los resultados del experimento para los tiempos de montaje en minutos de los dos grupos son:

$$\text{Grupo I: } \sum x = 1080\ ,\ \sum x^2 = 59300$$
$$\text{Grupo II: } \sum y = 1450,\ \sum y^2 = 86125$$

Encontrar el intervalo de confianza al nivel del 95 % para la diferencia de tiempos medios. Suponer normalidad e igualdad de varianzas.

SOLUCIÓN:

Definimos sendas variables aleatorias:

- $X \equiv$ *tiempo de montaje con el método I* $\sim N(\mu_1, \sigma)$
- $Y \equiv$ *tiempo de montaje con el método II* $\sim N(\mu_2, \sigma)$

El problema nos pide un intervalo de confianza al 95 % para la diferencia de medias de las variables aleatorias X e Y, por lo que utilizaremos como variable pivote:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Con la que obtenemos que el intervalo de confianza para la diferencia de medias es:

$$\mu 1 - \mu 2 \in \left(\bar{X} - \bar{Y} \mp t_{n_1+n_2-2,\alpha/2} Sp \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

Los datos que necesitamos para calcular dicho intervalo son:

- Grupo I: $n_1 = 20$, $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n_1} = \frac{1080}{20} = 54$, $S_1^2 = \frac{\sum x_i^2 - n_1 \bar{X}^2}{n_1 - 1} = \frac{59300 - 20 \cdot 54^2}{20-1} = 51.58$
- Grupo II: $n_2 = 25$, $\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n_2} = \frac{1450}{25} = 58$, $S_2^2 = \frac{\sum y_i^2 - n_2 \bar{Y}^2}{n_2 - 1} = \frac{86125 - 25 \cdot 58^2}{25-1} = 84.375$
- $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2+2} = 69.88 \Rightarrow S_p = 8.36$
- $t_{43,0.025} \simeq 2.017$ (lo calculamos interpolando)

Sustituyendo, **el intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ al 95 % es:** $(-9.066, 1.066)$

4. Dos universidades púlicas tienen métodos distintos para matricular a sus alumnos. Para comparar el tiempo medio que tardan los estudiantes en completar el trámite de matriculación, se anotaron los tiempos de inscripción para 100 alumnos seleccionados al azar en cada universidad, obteniendo los siguientes resultados:

$$\bar{X} = 135,\ S_1 = 15$$
$$\bar{Y} = 122,\ S_2 = 10$$

Suponiendo normalidad e igualdad de varianzas, obtener los intervalos de confianza con un nivel del 90, 95 y 99 % para la diferencia entre los tiempos medios reales de matriculación.

¿Existe una diferencia real entre los tiempos medios de cada universidad?

SOLUCIÓN:

Definimos sendas variables aleatorias:

- $X \equiv$ *tiempo que tardan los estudiantes de la primera universidad en completar el trámite de matriculación* $\sim N(\mu_1, \sigma)$
- $Y \equiv$ *tiempo que tardan los estudiantes de la segunda universidad en completar el trámite de matriculación* $\sim N(\mu_2, \sigma)$

El enunciado nos pide un intevalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$, por lo que usaremos como variable pivote:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Donde

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{99 \cdot 15^2 + 99 \cdot 10^2}{198} = 162.5 \Rightarrow S_p = 12.7475$$

De modo que los intervalos de confianza pedidos son:

- $90\,\%: \alpha = 0.1, t_{198,0.05} = 1.645$
  $(13 \mp 1.645 \cdot 1.8027) = (10.04, 15.96)$
- $95\,\%: \alpha = 0.05, t_{198,0.025} = 1.96$
  $(13 \mp 3.53) = (9.47, 16.53)$
- $99\,\%: \alpha = 0.01, t_{198,0.005} = 2.576$
  $(13 \mp 4.64) = (8.36, 17.64)$

De los intervalos calculados, vemos que $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ya que ninguno de los intervalos calculados contiene el 0, con lo que hay diferencia entre los tiempos medios; además, $\mu_1 - \mu_2 > 0$, es decir, $\mu_1 > \mu_2$.

5. El precio de venta de un producto en 7 establecimientos del centro es: 2420, 2990, 2570, 2435, 2860, 2750, 2600. Mientras que en otros 5 establecimientos del extrarradio es: 2350, 2320, 2400, 2350, 2520. Suponiendo que el precio del producto en ambas zonas está normalmente distribuido, obtener un intervalo al 98 % para el cociente de varianzas del precio en ambas zonas.

SOLUCIÓN:

Definimos sendas variables aleatorias:

- $X \equiv$ *precio del producto en establecimientos del centro* $\sim N(\mu_1, \sigma_1)$
- $Y \equiv$ *precio del producto en establecimientos del extrarradio* $\sim N(\mu_2, \sigma_2)$

El enunciado nos pide un intervalo de confianza al 98 % para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, para lo que usaremos como variable pivote:

$$T = \frac{S_2^2 \sigma_1^2}{S_1^2 \sigma_2^2} \sim F_{n_2-1, n_1-1}$$

Con lo que el intervalo será:

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{n_2-1, n_1-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{n_2-1, n_1-1, \frac{\alpha}{2}} \right)$$

Los datos que necesitamos para calcular dicha expresión son:

- Centro: $n_1 = 7$, $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n_1} = 2660.71$, $S_1^2 = \frac{\sum x_i^2 - n_1 \bar{X}^2}{n_1 - 1} = \frac{49832.75 - 7 \cdot 7079377.7}{6} = 46180$
- Extrarradio: $n_2 = 5$, $\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n_2} = 2388$, $S_2^2 = \frac{\sum y_i^2 - n_2 \bar{Y}^2}{n_2 - 1} = \frac{28537800 - 5 \cdot 5702544}{4} = 6270$
- $F_{4,6,0.01} = 9.148$
- $F_{4,6,0.99} = \frac{1}{F_{6,4,0.01}} = \frac{1}{15.207} = 0.06576$
- $\frac{S_1^2}{S_2^2} = 7.365$

Por lo que, sustituyendo, el intervalo de confianza pedido es $(0.4843, 67.375)$

6. Una empresa de publicidad está interesada en conocer la audiencia de cierto programa de TV. Después de realizar una encuesta a un número considerable de espectadores, deduce que la audiencia media es superior al 35 % y no sobrepasa el 43 %, con una confianza del 95 %. ¿A cuántos espectadores se les hizo la encuesta?

SOLUCIÓN:

Definimos la siguiente variable aleatoria que sigue una distribución de Bernoulli (p):

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el espectador ve el programa de televisión} \\ 0 & \text{si no lo ve} \end{cases}$$

El enunciado nos dice que se ha calculado un intervalo de confianza para p al 95 %, que es $(0.35, 0.43)$. Para hallar dicho intervalo, se utiliza la variable pivote $\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \sim N(0,1)$ (por ser n grande) de modo que dicho intevalo vendrá dado por $\left(\bar{X} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right)$

Es decir, dado que $z_{0.025} = 1.96 (\alpha = 0.05)$, tenemos que

$$\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} = 0.35$$

$$\bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} = 0.43$$

Restando ambas expresiones, obtenemos que:

$$2 \cdot 1.96\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} = 0.08 \Rightarrow n = \bar{X}(1-\bar{X})\left(\frac{2 \cdot 1.96}{0.08}\right)^2$$

Y teniendo en cuenta que $2\bar{X} = 0.43 + 0.35 = 0.78 \Rightarrow \bar{X} = 0.39$, sustituyendo, calculamos el **número de espectadores** $n = 572$.